Role of Volterra integral equations of the first kind in inverse problem for heat equation with non-local boundary condition

Conference Paper · May 2016

DOI: 10.13140/RG.2.1.3897.6888

1 author:

Denis Sidorov
Russian Academy of Sciences

О РОЛИ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

И.Р.Муфтахов*, Д.Н.Сидоров* **, А.И.Дрегля**

*Иркутский национальный исследовательский технический университет

**Иркутский государственный университет

Иркутск

ildar.mft@gmail.com

Рассмотрим уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t), \quad x \in [0,L], \quad 0 < t < \infty \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{x=0} = \ u|_{x=L} = 0. \tag{3}$$

Функция *F(x,t)* характеризует плотность теплового источника (выделения тепла) в точке *x* в момент *t*. Начально-краевая задача (1)-(3) (см. [1]) с известным тепловым источником встречается в различных областях науки и техники, включая теплоэнергетику, гидрологию, материаловедение (см., например, [2]) и др. Если *F(x,t)* известна, то решение *u(x,t)* строится в замкнутом виде, см. [1], стр.214-215. Проблеме восстановления функции источника и другим обратным задачам теплопроводности в последние годы посвящено множество работ, см., например, [3-6] и др. В этих работах использовались локальные начальные и граничные условия.

Следуя [3,4,6], предположим, что функция тепловых источников *F(x,t)* представима в виде произведения *f(x)w(t)*. Например, в случае, когда тепло выделяется в результате прохождения тока силы *I* по стержню, сопротивление которого равно *R,* то $F(I,R)=0.24I^2R$.

В этой заметке мы предполагаем, что *f(x)* - известная функция из $C'_{[0,L]}, f(0) = f(l) = 0,$ а *w(t)* является искомой.

Мы изучаем задачу определения динамической характеристики теплового источника, т.е. функции *w(t)*.

С целью единственности решения задачи зададим желаемую усредненную динамику изменения температуры в стержне длины L с помощью нелокального граничного условия

$$\int_0^L l(x)u(x,t)dx = g(t), \tag{4}$$

полагая, что $l(x) \in C'_{[0,L]}$, $g(t) \in C'_{[0,T]}, g(0) = 0$ – заданные функции. Тогда условие (4) естественно назвать *нелокальным* граничным условием, а функцию *w(t)* – управлением источника.

Покажем, что задача определения функции *w(t)* сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра (ИУВ) первого рода.

Действительно, согласно [1, с.183] можно строить решение задачи (1)-(3) в виде

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^L G(x,\xi,t-\tau)\, F(\xi,\tau) d\xi d\tau, \qquad (5)$$

где

$$G(x,\xi,t-\tau) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 a^2(t-\tau)} \sin\frac{\pi n}{L}x \ \ \sin\frac{\pi n}{L}\xi.$$

Для определения функции *w(t)* перепишем (5) в виде

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^L G(x,\xi,t-\tau)\, f(\xi) w(\tau)\, d\xi d\tau. \qquad (6)$$

Подставив решение (6) в граничное условие (4), получим

$$\int_0^t \iint_0^L l(x) G(x,\xi,t-\tau) f(\xi) dx d\xi\, w(\tau) d\tau = g(t)$$

Обозначая

$$K(t-\tau) \coloneqq \iint_0^L l(x) G(x,\xi,t-\tau) f(\xi) dx d\xi,$$

получаем линейное ИУВ первого рода относительно искомой функции управления *w(t)*:

$$\int_0^t K(t-\tau) w(\tau) d\tau = g(t). \qquad (7)$$

Пусть *f(x)* и *l(x)* – дифференцируемые функции, причем $\int_0^L f(x) l(x) dx = C \neq 0.$ Пусть для заданных функций *f(x)* и *l(x)* и их производных справедливы разложения в равномерно сходящиеся ряды

$$f^{(i)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\sin\frac{\pi n}{L}x)^{(i)},\ l^{(i)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (\sin\frac{\pi n}{L}x)^{(i)},\ \ i = \{0,1\}.$$

Тогда функция $K(t)$ будет дифференцируемой функцией, причем K(0)= $C \neq 0$.

Если при этом $g(t) \in C'_{(0,+\infty)}$, $g(0) = 0$, $\int_0^L f(x) l(x) dx \neq 0$, то ИУВ (7) имеет единственное непрерывное решение, которое в общем случае можно построить численно. Для численного решения можно воспользоваться различными методами регуляризации, см. [7,8].

В случае конкретных *l(x), f(x)* вид ядра в уравнении (7) упрощается, что позволяет в ряде случаев получить решение уравнения (7) в замкнутом виде.

Действительно, пусть $f(x) = \sum_{n\in I} a_n \sin\frac{\pi n}{L}x$, $l(x) = \sum_{n\in J} a_n \sin\frac{\pi n}{L}x$, где I и J - конечные множества индексов из $\mathbb{N}$.

Распишем ядро уравнения (7) в виде

$$K(t-\tau) = \frac{2}{L}\iint\limits_0^l \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 a^2(t-\tau)} l(x)\, f(\xi) \sin\frac{\pi n}{L}x \sin\frac{\pi n}{L}\xi dx d\xi.$$

Так как

$$\int_0^L \sin\frac{\pi n}{L}x \quad \sin\frac{\pi m}{L}x dx = \begin{cases} 0, n \neq m \\ \frac{L}{2}, n = m, \end{cases}$$

то в соответствующем ИУВ получим ядро в виде суммы экспонент:

$$K(t-\tau) = \frac{L}{2}\sum_{n\in I\cap J} e^{-\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 a^2(t-\tau)} a_n b_n.$$

Если при этом

$$\frac{L}{2}\sum_{n\in I\cap J} a_n b_n, \neq 0, \qquad (*)$$

$g(t) \in C'_{(0,+\infty)}$, $g(0) = 0$, то соответствующее ИУВ (7) будет иметь единственное решение. Это решение можно получить численно или аналитически (используя преобразование Лапласа).

Таким образом, в этих предположениях предложенный метод позволяет получить решение в замкнутом виде.

Пример.

Рассмотрим случай, когда $l(x) = \sin\frac{\pi m x}{L}$. Пусть при этом $\int_0^L f(\xi) \sin\frac{\pi m}{L}\xi d\xi \neq 0$. В этом примере получим ядро

$$K(t-\tau) = e^{-\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 a^2(t-\tau)} \int_0^L f(\xi) \sin\frac{\pi m}{L}\xi d\xi.$$

Введем обозначение $\mathrm{C} := \int_0^L f(\xi) \sin\frac{\pi m}{L}\xi d\xi$. Таким образом, в случае нелокального граничного условия (4) с известной функций $l(x) = \sin\frac{\pi m x}{L}$, получаем простейшее ИУВ первого рода относительно *w(t):*

$$C\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 a^2(t-\tau)} w(\tau) d\tau = g(t). \qquad (7)$$

Следовательно, при $g(t) \in C'_{[0,+\infty)}$, $g(0) = 0$ в этом примере функция управления тепловым источником *w(t)* определится формулой:

$$w(t) = \frac{1}{c}\left\{g'(t) + \left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 a^2 g(t)\right\}. \tag{8}$$

Соответствующее решение (температуру в точке с координатами x в момент времени t) для конкретной составляющей *f(x)* теплового источника определяется по формуле (6) с использованием построенного решения (8).

Если функции *f(x)* и *l(x)* не обладают требуемой гладкостью, то изложенным подходом можно построить импульсное управление и обобщенное решение задачи (1-4).

Библиография

[1] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977.

[2] А.И. Дрегля. Краевые задачи в моделировании формования волокон. – Saarbrücken: Lambert Acad. Publ. GmbH & Co. KG, 2012.

[3] J.R. Cannon, P. Duchateau. Structural identification of an unknown source term in a heat equation, Inverse Problems, 14 (1998), 535-551.

[4] M.I. Ivanchov. The inverse problem of determining the heat source power for a parabolic equation under arbitrary boundary conditions, J. Math. Sci., 88 (1998), 432-436.

[5] С.В. Солодуша, Н.М. Япарова. Численное решение обратной граничной задачи теплопроводности с помощью уравнений Вольтерра первого рода, Сиб. журн. вычисл. матем., 18:3 (2015), 327–335.

[6] X. Fang et al. Numerical methods for reconstruction of source term of heat equation from the final overdetermination. arXiv:1311.5972v2 [math.AP] 2014.

[7] А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. – Киев: Наук. думка, 1978.

[8] И.Р. Муфтахов, Д.Н. Сидоров, Н.А. Сидоров. О регуляризации по Лаврентьеву интегральных уравнений первого рода в пространстве непрерывных функций. Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика, 15 (2016), 62–77.